Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 25 април 2010 г.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. Г	**11. А**	**21. А**	**31. А**	**41. В**
2. В	**12. 432**	**22. А**	**32. 2**	**42. А**
3. В	**13. А**	**23. Г**	**33. В**	**43.** $\mathbf{105^0}$
4. В	**14. Б**	**24. А**	**34. В**	**44. Б**
5. Б	**15. Г**	**25. А**	**35. В**	**45. Б**
6. 9	**16. 28**	**26. В**	**36. Г**	**46. Г**
7. Г	**17. А**	**27.** $\mathbf{21^0}$	**37. А**	**47. В**
8. Б	**18. 3**	**28. Б**	**38. 29**	**48. Г**
9. Г	**19. Г**	**29. Б**	**39. Б**	**49. В**
10. В	**20. Б**	**30. Б**	**40.** $\mathbf{36^0}$	**50. 30**

1. Отг. Г). Единствено изразът в **Г)** е с положителна стойност.

2. Отг. **В).** Фигурата на чертежа е петоъгълник и сборът от вътрешните му ъгли е равен на 3.180^0. Четири от вътрешните ъгли са връхни или съседни на дадените. Тогава $55°+150°+140°+90°+x=3.180°$, откъдето $x=540^0-435^0=105^0$.

3. Отг. В). $3x-5=3x-6 \Leftrightarrow 0x=-1$, което е невъзможно.

4. Отг. В). Четириъгълната пирамида има 8 ръба и следователно дължината на един ръб е $160:8=20$ *см*. Тогава лицето на основата, която е квадрат, е $20.20=400$ *кв. см*.

5. Отг. Б). Щом произведението на двете числа е нула, то единият множител е нула. Тогава вторият множител е -10 и по-големият от двата множителя 0.

6. Отг. **9**. Ако означим с x точките при петия опит, то $\dfrac{7,75.4+x}{5}=8$, откъдето $x=9$.

7. Отг. Г). $2(x-5)\geq 3(4x-1) \Leftrightarrow 2x-10\geq 12x-3 \Leftrightarrow -7\geq 10x \Leftrightarrow -0,7\geq x$, т.е. $x\leq -0,7$.

8. Отг. Б). Срещу по-голям ъгъл в един триъгълник лежи по-голяма страна. Следователно ъгълът при върха L е по-малък от ъгъла при върха M . Ако този ъгъл е не по-малък от 61^0, то сборът на трите ъгъла в триъгълника е по-голям от $3.61^0 = 183^0$, което противоречи на теоремата, че сборът на ъглите във всеки триъгълник е 180^0. Следователно най-малкият ъгъл в триъгълника е при върха L .

9. Отг. Г). $25\ 000.5 = 125\ 000$ *см*, което е 1,25 *км*.

10. Отг. В). Тъй като $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$, двамата тракористи са изорали общо $\frac{3}{10}$ от нивата, което е 30%. Следователно неизорани остават 70% от нивата.

11. Отг. А). Ако един от ъглите е $7x$, то другият е $5x$. Тъй катао сборът на ъглите е $180°$, то $5x+7x=180^0$. Оттук $x=15°$, а ъглите са $15.7=105°$ и $15.5=75°$. Разликата им е $105^0-75^0=30°$.

12. Отг. 432. Ако страната на куба е a *см*, то размерите на паралелепипеда в сантиметри са a, a и $2a$. Тогава $360=10a^2$, откъдето $a^2=36$ и $a=6$ *см*. За обема намираме $2a.a.a=2a^3=2.6^3=432$ *куб. см*.

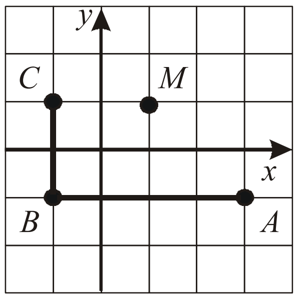
13. Отг. А).

14. Отг. Б). Раменете на $\angle MDH$ и $\angle DAB$ са взаимно перпендикулярни и следователно тези ъгли са равни. Заключаваме, че $\angle DAB = 55^0$ **.**

15. Отг. Г). Скоростта на катера по реката (срещу течението) е $16-3,5=12,5$ *км/ч*. За 2 часа и 12 минути, които са равни на 2,2 часа, катерът ще измине $12,5.2,2=27,5$ *км*.

16. Отг. 28 . По трите си измерения конструкцията има съответно 4, 3 и 3 единични кубчета. Следователно най-малкият правоъгълен паралелепипед, който включва показаната конструкция, е $4\times3\times3$. Този паралелепипед съдържа 36 единични кубчета и следователно трябва да се добавят още $36-8=28$ единични кубчета.

17. Отг. А). $\angle ABC = 90°$, а ΔBMC е равнобедрен и правоъгълен. Следователно $\angle MBC = 45°$. В другите случаи ъглите, на които се разделя $\angle ABC$, са различни от $45°$.



18. Отг. 3. Ако отговорът на Ангел е n, то следващите отговори последователно са $\frac{3}{2}n$, $\frac{9}{4}n$, $\frac{27}{8}n$ и $\frac{81}{16}n$. Тъй като числото $\frac{81}{16}n$ е цяло, то n трябва да се дели на 16. Ако $n \ge 32$, то $\frac{81}{16}n \ge \frac{81}{16}\cdot 32 = 162$. Най-големият резултат в таблицата за умножение обаче е по-малък от 162 и следователно $n=16$. Тогава отговорът на Генчо е $\frac{27}{8}n = 54$. В таблицата за умножение този резултат се получава единствено с множителите 6 и 9, чиито най-голям общ делител е 3.

19. Отг. Г). Даденото уравнение е еквивалентно с $2(a+2)x = 3(a-1)$, което няма решение при $a = -2$. При всички останали стойности на a уравнението има единствено решение $x = \frac{3(a-1)}{2(a+2)}$.

20. Отг. Б). Ако $\angle ABC = \alpha$, то $\angle MCB = \angle ACB - \angle ACM = 180^0 - 2\alpha - 30^0 = 150^0 - 2\alpha$. Тогава $\angle MNC = \frac{1}{2}(180^0 - \angle MCN) = \frac{1}{2}(30^0 + 2\alpha) = 15^0 + \alpha$ и тъй като този ъгъл е външен за ΔMBN, получаваме, че $\angle BMN = 15^0 + \alpha - \alpha = 15^0$.

21. Отг. А). От първото твърдение следва, че Валентин учи в пети клас. От второто твърдение следва, че Ангел се занимава с шах. От третото твърдение следва, че или Ангел, или Боян се занимава с баскетбол. Но тъй като Ангел се занимава с шах, то остава с баскетбол да се занимава Боян. Следователно Валентин се занимава с футбол и той е ученик в пети клас.

22. Отг. А). $S_{EGF} = \frac{1}{2}S_{ECF} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.S_{DEC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}S_{DBC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{16}S_{ABCD}$.

23. Отг. Г). Като съкратим двете страни на равенството от условието на 400, получаваме $2a = b$, откъдето $16a^4 = b^4$. Но $a^4 \geq 0$ и следователно $a^4 \leq 16a^4$, т.е. $a^4 \leq b^4$. Заключаваме, че неравенството в **Г)** е винаги вярно. Останалите неравенства не винаги са верни. Наистина, ако $a = 1$ и $b = 2$, то **А)** и **В)** не са верни, а при $a = -1$ и $b = -2$ не е изпълнено **Б)**.

24. Отг. А). Нека $(x; y)$ е точка с исканото свойство, т.е. $x + y = xy = \frac{x}{y}$. От второто равенство (като разделим на x) получаваме $y = \frac{1}{y}$. Оттук $y^2 = 1$ и следователно $y = \pm 1$. По-нататък заместваме y в равенството $x + y = xy$. При $y = 1$ получаваме $x + 1 = x$, което не е възможно. При $y = -1$ стигаме до $x - 1 = -x$, откъдето $x = \frac{1}{2}$. Точката $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ е единствената с исканите свойства.

25. Отг. А). Ако $2010 - a = x$, $2010 - b = y$ и $2010 - c = z$, то $A = xy + yz + zx$, $4B = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ и $C = \frac{1}{3}(x+y+z)^2$. Сега лесно следва, че $3C = x^2 + y^2 + z^2 + 2A$ и $4B = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2A$, откъдето $3C - 2A = 2B - A$, т.е. $C = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Другите зависимости не са изпълнени. Наистина, ако допуснем, че някоя от тях е в сила, то лесно се установява, че от нея и от току-що доказаната връзка следва равенство $A = B$, което е еквивалентно с $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$. От друга страна $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$ и $z^2 + x^2 \geq 2zx$. Като съберем почленно тези три неравенства, получаваме $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ и равенство се достига само ако

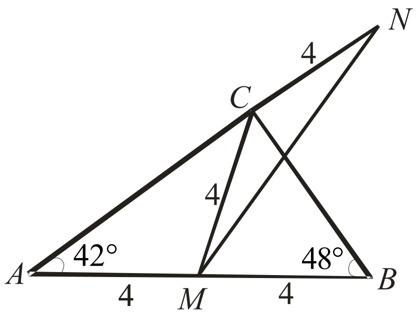
$x = y = z$, т.е. когато $a = b = c$. Заключаваме, че равенството $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ е невъзможно, защото по условие числата a , b и c са различни.

26. Отг. В).

първа дъщеря	втора дъщеря	трета дъщеря	сбор
1	1	72	74
1	2	36	39
1	3	24	28
1	4	18	23
1	6	12	19
1	8	9	18
2	2	18	22
2	3	12	17
2	4	9	15
2	6	6	14
3	3	8	14
3	4	6	13

В таблицата са показани възможните разлагания на числото 72 на произведение от 3 множителя. Само в два от случаите сборовете на трите възрасти съвпадат помежду си и са равни на 14. От условието на задачта следва, че номерът на къщата е точно 14, защото в противен случай номерът идентифицира еднозначно годините на трите дъщери. Ако възрастите са 2, 6, 6 , то няма да има най-голяма дъщеря (в този случай най-големите дъщери са две). Остава комбинацията 3, 3, 8 и следователно най-голямата дъщеря на Асен е на 8 години.

27. Отг. $21°$**.** От даденото следва, че $\angle ACB = 90°$ и получаваме, че $CM = \frac{1}{2}AB = 4\,см$. Тогава ΔMCN е равнобедрен ($CM = CN = 4\,см$). От друга страна $\angle MCA = \angle MAC = 42^0$ и $\angle MCA$ е външен за ΔMCN . Следователно $\angle MNC = \frac{1}{2}\cdot 42° = 21°$.



28. Отг. Б). Като съберем почленно двете равенства, получаваме

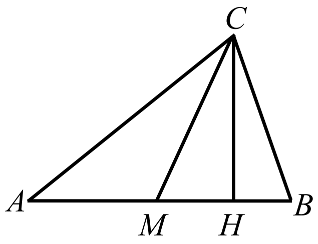
$$2x = a + b + c + d + e + f \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

и следователно $x \geq 11$. Числото 11 може да се реализира по следния начин: $11 = 1 + 3 + 7 = 2 + 4 + 5$. Следователно отговорът на задачата е 11.

29. Отг. Б). $\frac{2010^3 - 1}{2010^2 + 2011} = \frac{(2010-1)(2010^2 + 2010.1 + 1^2)}{1 + 2010 + 2010^2} = 2010 - 1 = 2009$.

30. Отг. Б). Последната цифра на A е 3, а последната цифра на B е 4. Тъй като $A < B$, то последната цифра на $A - B$ е 1.

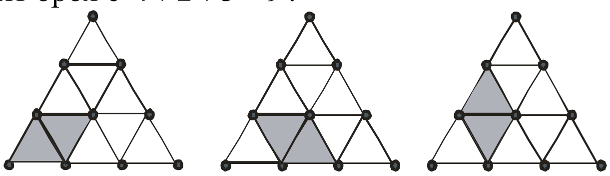
31. Отг. А). Щом $\angle ACB = \angle BAC + \angle ABC$, то $2\angle ACB = 180° \Rightarrow \angle ACB = 90°$. Но тогава височината CH ($H \in AB$) към хипотенузата AB ще има дължина 2 *см*, защото $8 = S = \frac{AB.CH}{2} = \frac{8CH}{2} = 4CH$. От друга страна $CM = 4$ *см*, където M е средата на AB. В правоъгълния ΔMHC катетът CH е половината от хипотенузата CM, което означава, че $\angle CMH = 30^0$. От равнобедрения ΔMBC ($MB = MC$) следва, че $\angle ABC = \frac{1}{2}(180^0 - 30^0) = 75^0$.



32. Отг. 2. От представянето $5^{2010} + 5^{2011} + 5^{2012} = 5^{2010}\left(1+5+5^2\right) = 5^{2010}.31$ следва, че единствените прости делители на числото от условието са 5 и 31.

33. Отг. В). Ако някое число x е решение на последното неравенство, то това число ще бъде решение и на останалите три и следователно не е решение на задачата. Заключаваме, че търсените числа x трябва да са решения на неравенството $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} \le 4$. Оттук $x \le \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$, т.е. $x \le 16$. От друга страна, числото x трябва да е решение и на останалите три неравенства, т.е. на третото, защото първите две са изпълнени винаги, когато е изпълнено третото. Следователно $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x-2}{12} > 3$, откъдето $x > \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$. Получаваме, че решенията на задачата са числата $x = 13,\ 14,\ 15$ и 16, които са 4 на брой.

34. Отг. В). По-лесно преброяване може да стане, ако точките се свържат с отсечки, при което се получават 9 малки триъгълничета. От тях 5 са на долния ред, 3 са на реда в средата, а последното триъгълниче е най-горе. Най-напред трябва да се забележи, че страната на кой да е от търсените ромбове е равна на страната на малкото триъгълниче. Освен това, всеки две съседни (с обща страна) триъгълничета на долния ред образуват ромб. Тъй като двойките съседни триъгълничета са 4, то и ромбовете на долния ред са 4. По същия начин преброяваме 2 ромба на реда в средата. Остава да се преброят и ромбовете, които са образувани от две съседни триъгълничета, но от различни редове. Един такъв ромб е показан на третия чертеж. Общо ромбовете от този вид са 3. Окончателно търсеният броя е $4+2+3=9$.



35. Отг. В). От $|a| < 3$ следва, че най-голямата цяла стойност на a е 2, а от $2 < |b| < 6$ следва, че най-малката цяла стойност на b е -5. Тогава най-голямата стойност на $2a - b$ е $2.2 - (-5) = 4 + 5 = 9$.

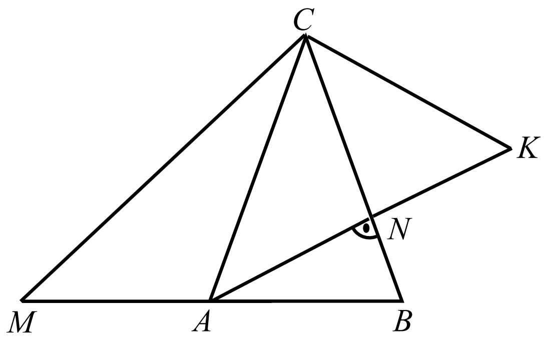
36. Отг. Г). След разкриване на скобите намираме, че коефициентът пред x^2 е $-2a^2$ и той е равен на 0 при $a=0$. Това е единственият случай, при който уравнението е от първа степен. Самото уравнение приема вида $x+3=0$, чийто корен е $x=-3$.

37. Отг. А). Теглото на двете получени сплави е едно и също и е равно на $(a+b)$ грама. Достатъчно е да сравним количеството злато в двете сплави. В третата сплав то е $\frac{a}{100}\cdot a+\frac{b}{100}\cdot b=\frac{1}{100}\left(a^2+b^2\right)$ грама, а в четвъртата е $\frac{a}{100}\cdot b+\frac{b}{100}\cdot a=\frac{1}{100}\cdot 2ab$ грама. Тъй като $\frac{1}{100}\left(a^2+b^2\right)-\frac{1}{100}\cdot 2ab=\frac{1}{100}(a-b)^2>0$, то верният отговор е **А)**.

38. Отг. 29. Имаме $r=p^3+p^2q-2q^3=p^3-q^3+p^2q-q^3=(p-q)\left(p^2+2pq+2q^2\right)$. Очевидно $p^2+2pq+2q^2>1$ и ако $p-q>1$, то числото r ще е съставно. Ето защо $p-q=1$ и понеже p и q са прости, това е възможно само ако $p=3$ и $q=2$. Тогава $r=29$.

39. Отг. Б). Ако плодовете са били най-много 8, то поне двама е трябвало да получат по 1 плод, защото $4.2+1=9>8$. Тъй като не е възможно двама да са получили по 1 плод (по условие плодовете са с различни тегла и в такъв случай не е възможно тези двама да получат еднакви тегла плод), то броят на наличните плодове е поне 9. Ще дадем пример за 9 плода, при който се реализират условията на задачата: първи плод = 100 г, втори плод = 200 г, трети плод = 300 г, четвърти плод = 400 г, пети плод = 500 г, шести плод = 600 г, седми плод = 700 г, осми плод = 800 г и девети плод = 900 г; тогава 900 = 100 + 800 = 200 + 700 = 300 + 600 = 400 + 500 и 900 + 600 = 800 + 700 = 100 + 200 + 300 + 400 + 500.

40. Отг. 36°**.** Нека $AN\left(N\in BC\right)$ е перпендикулярът от точката A към правата BC, а K е такава точка върху AN, че N е средата на AK. Тогава $AK=2AN=MC$ съгласно даденото. В ΔAKC отсечката CN е медиана и височина. Следователно този триъгълник е равнобедрен с бедра $AC=CK$. Оттук следва, че триъгълниците ACK и MBC са еднакви по трети признак, тъй като $AC=CK=BC=BM$ и $AK=MC$. От еднаквостта на тези триъгълници следва, че $\angle ABC=\angle ACK$ и ако означим $\angle ACB=\gamma$, то $\angle ABC=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ и $\angle ACK=2\gamma$.

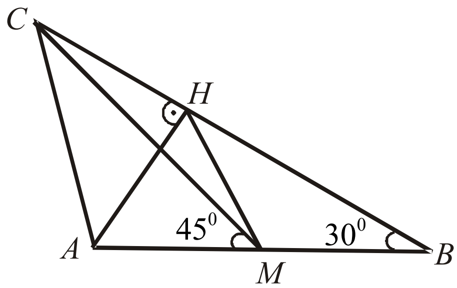


Следователно $90^\circ-\frac{\gamma}{2}=2\gamma\Rightarrow\gamma=36^\circ$, т.е. ъглите на ΔABC са $36^\circ,72^\circ,72^\circ$.

41. Отг. В). Да означим с a вложената сума за закупуване на стоката от борсата, а с b планираната сума за получаване след продажбата на тази стока. Тъй като търговецът е намалил цената с 10%, той фактически е получил сумата $b-0,1b=0,9b$. От друга страна тази сума е $a+0,08a=1,08a$. Оттук $0,9b=1,08a$ и следователно $\frac{b}{a}=\frac{1,08}{0,9}=1,2$. Тъй като планираната печалба е $\frac{b-a}{a}\cdot 100\%=100\left(\frac{b}{a}-1\right)\%$, то като заместим, намираме, че тя е $100\left(\frac{b}{a}-1\right)\%=100(1,2-1)\%=20\%$.

42. Отг. А). Решенията на неравенството $(x-1)^2\le-(x+2)^2+2(x^2+2)$ са $x\le-\frac{1}{2}$. За тези стойности на x имаме $5x-3<0$, $x<2$ и $x<0$. Тогава $|5x-3|=-(5x-3)=-5x+3$, $|x-2|=-(x-2)=-x+2$ и $|5x|=-5x$. Следователно
$|5x-3|-|x-2|-|5x|=-5x+3+x-2+5x=x+1$ и най-голямата цяла стойност на този израз в разглеждания интервал е 0. Тя се достига при $x=-1$.

43. Отг. $105°$. От $\angle AMC=45°$ следва, че $\angle MCB=15°$ ($\angle AMC$ е външен за ΔMBC). Нека $AH\perp BC$ ($H\in BC$). Тъй като $\angle ABC$ е остър, точката H е вътрешна за страната BC. От друга страна HM е медиана в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл $30°$ и следователно ΔAMH е равностранен. Тогава $\angle CMH=60°-45°=15°$. Получаваме, че ΔCMH е равнобедрен, т.е. $CH=MH$. Но $MH=AH$ и заключаваме, че ΔCAH е също равнобедрен. Оттук $\angle ACH=45°$ и следователно $\angle BAC=180^\circ-(\angle ACH+\angle ABC)=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$.



44. Б). Играта печели този, след чийто ход се получава 1. Губещи позиции са нечетните числа. Най-голямото четно число в разглеждания интервал е 48. Ако първият играч избере делител 1, за втория играч остава да извършва действия с нечетно число. Какъвто и делител да избере вторият играч, след неговия ход ще се получи четно число (нечетните числа имат само нечетни делители и разликата на две нечетни числа е четна). Печелившата стратегия на първия играч е да избира само нечетни делители (например само 1).

45. Отг. Б). Върху правата през M, която е успоредна на CN, взимаме точка L така, че $\angle ACL=40^0$, като L и N са в различни полуравнини спрямо правата CM. Тогава ΔMCL е равнобедрен ($ML=CL$). Освен това, $\angle MLC=\angle LMN=80^0$ и следователно трапецът $LMNC$ е равнобедрен. Заключаваме, че $ML=CL=MN$. Нека O е точка върху отсечката MN така, че $\angle OLM=20°$. Тогава ΔMOL е равнобедрен, защото $\angle OML=\angle MOL=80°$. В частност $OL=LM$ и следователно ΔOCL е равностранен (равнобедрен с ъгъл при върха, равен на 60^0). Сега $\angle COB=180°-80°-60°=40°$ и тъй като $\angle OBC = 70°$, то ΔOBC е равнобедрен ($OC = OB$). Но и ΔAOC е равнобедрен ($\angle BAC = \angle ACO = 20^0$). Следователно $OC = \frac{1}{2}AB$. От разглежданията по-горе следва, че $MN = OC$ и заключаваме, че $MN = \frac{1}{2}AB = 6\,см$.

46. Отг. Г). $5x^2 + 20x - 4xy + 4y^2 = (2x+5)^2 + (x-2y)^2 - 25$. Тъй като за всички стойности на x и y е изпълнено $(2x+5)^2 + (x-2y)^2 \geq 0$, най-малката стойност на израза от условието на задачата е равна на -25 и тя се достига при $x = -\frac{5}{2}$ и $y = -\frac{5}{4}$.

47. Отг. В).

$$2010^4 + 2009.2010^2 - 2010 = 2010^4 + 2009.2010^2 - 2009 - 1 = (2010^4 - 1) + 2009(2010^2 - 1) =$$
$$= (2010^2 - 1)(2010^2 + 1) + 2009(2010^2 - 1) = (2010^2 - 1)(2010^2 + 1 + 2009) =$$
$$= 2009.2011.(2010^2 + 2010) = 2009.2011.2010.2011 = 2009.2010.2011^2.$$

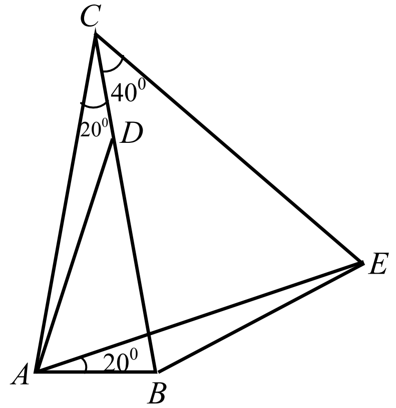
Тъй като $2009 = 7^2.41$, $2010 = 2.3.5.67$ и 2011 е просто число, сумата от различните прости делители на израза от условието е $7 + 41 + 2 + 3 + 5 + 67 + 2011 = 2136 = 2^3.3.89$. Най-големият прост делител на полученото число е 89.

48. Отг. Г). При $a = 2$ са в сила неравенствата $(n+1)^3 < (n+1)^2(n+2) < (n+2)^3$ и следователно $a = 2$ не е решение на задачата, защото изразът от условието е между кубовете на две последователни естествени числа. При $a = 7$ имаме $(n+2)^3 - (n+1)^2(n+7) = -3n^2 - 3n + 1 < 0$ и $(n+3)^3 - (n+1)^2(n+7) = 12n + 20 > 0$, което показва, че и $a = 7$ не е решение на задачата. При $a = 8$ по същия начин показваме, че $(n+2)^3 < (n+1)^2(n+8) < (n+4)^3$. В този случай единствената възможност $(n+1)^2(n+8)$ да е точен куб е да е изпълнено равенството $(n+1)^2(n+8) = (n+3)^3$, откъдето получаваме, че $n^2 - 10n = 19$. Тъй като $n^2 - 10n = n(n-10)$, заключаваме, че $n = 1$ или $n = 19$. С проверка се установява, че тези числа не удовлетворяват разглежданото равенство. Нека накрая $a = 15$. Сега е достатъчно да изберем $n = 1$, при което намираме, че изразът $(n+1)^2(n+a)$ е равен на 4^3.

49. Отг. В). Нека точката E в равнината на триъгълника е такава, че $\angle BAE = 20^0$ и $\angle BCE = 40^0$. Тогава $\Delta ACE = 60^0$ и

$$\angle EAC = \angle BAC - \angle BAE = 80^0 - 20^0 = 60^0.$$

Заключаваме, че ΔAEC е равностранен и следователно $AE = AC$. Тогава триъгълниците ACD и EAB са еднакви по I признак. От друга страна ΔBEC е равнобедрен ($BC = EC$), откъдето $\angle CEB = \frac{1}{2}(180^0 - 40^0) = 70^0$. Имаме $\angle CAD = \angle AEB = \angle CEB - \angle CEA = 70^0 - 60^0 = 10^0$. Следователно $\angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = 80^0 - 10^0 = 70^0$.



50. Отг. 30. Да означим с A един от отборите. Ще използваме следния факт: ако A е завършил по един и същ начин мачовете си с отборите B и C, т.е. A е победил B и C, A е загубил от B и C или A е завършил наравно с B и C, то мачът между B и C със сигурност е бил равен. Сега да означим с m броя на победите на A в турнира, с n броя на загубите му и с k броя на равните му мачове. Имаме $m+n+k=14$. От друга страна, съгласно отбелязания по-горе факт можем да твърдим, че в мачовете между $m-$те отбора, които са победени от A, равните мачове са $\frac{m(m-1)}{2}$. Аналогично, в мачовете между $n-$те отбора, които са победили A, равните мачове са $\frac{n(n-1)}{2}$, а в мачовете между $k-$те отбора, които са завършили наравно с A, равните мачове са $\frac{k(k-1)}{2}$. Следователно всички равни мачове в турнира са $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{1}{2}\big(m(m-1)+n(n-1)+k(k+1)\big)$ и ако допуснем, че това число е по-малко от 30, получаваме $m(m-1)+n(n-1)+k(k+1)<60$. Оттук, като използваме, че $m+n+k=14$, т.е. че $k=14-m-n$, намираме $m^2-2m+n^2-2n+k^2+1+1<48$ и $(m-1)^2+(n-1)^2+k^2<48$. Нека $a=m-1$ и $b=n-1$. Тогава $a^2+b^2+k^2<48$ и $a+b+k=12$. Ще използваме, че $a^2+b^2\ge 2ab$ и аналогично, че $a^2+k^2\ge 2ak$ и $b^2+k^2\ge 2bk$. Като съберем почленно последните 3 неравенства, получаваме $2(a^2+b^2+k^2)\ge 2(ab+ak+bk)$, т.е. $a^2+b^2+k^2\ge ab+ak+bk$. Заместваме по-горе и стигаме до:

$$144=12^2=(a+b+k)^2=a^2+b^2+k^2+2(ab+bk+ak)\le 3(a^2+b^2+k^2)<3.48=144,$$

т.е. $144<144$, което е невъзможно. Така получаваме, че възможно най-малкият брой равни мачове в турнира е 30. Една възможна реализация на 30 е следната. Да разделим 15–те отбора на 3 групи (I, II и III) от по 5 отбора. Нека всеки отбор от I група е победил всеки отбор от II група, всеки отбор от II група е победил всеки отбор от III група, а всеки отбор от III група е победил всеки отбор от I група. Освен това нека мачовете между отборите в коя да е от групите са завършили наравно. Следователно общият брой равни мачове в турнира е $3\cdot\frac{5.4}{2}=30$. Остава да покажем, че за всеки три отбора има поне два, които от мачовете в тройката са събрали един и същ брой точки. Проверката може да се извърши, като се разгледат трите възможности за една тройка: когато трите отбора са в една група, когато трите отбора са в различни групи и когато два от отборите са в една от групите, а третият е в друга група.