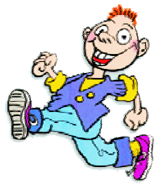
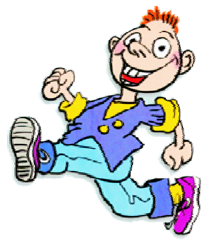
Учебен център Регалия



Учебен център • Издателство • Всичко за матурите • Е-обучение • За нас

Учебен център "Регалия" организира:



- целогодишни курсове за подготовка за зрелостни и кандидатстудентски изпити;
- целогодишни курсове за кандидатстване в езикови и профилирани гимназии по български език и математика;
- пробни изпити за кандидатстване след 7. клас;
- курсове за текуща подготовка по български език и математика за 6. клас.

На интернет страницата на Учебния център
http://www.regalia6.com
може да намерите:

тестове за външно оценяване за 4. клас

тестове за външно оценяване за 5. клас

тестове за външно оценяване за 6. клас

тестове за външно оценяване и кандидатстване след 7. клас

конкурсни изпити за кандидатстване след 7. клас

задачи от национални състезания за 7. клас

примерни тестове за ЕПИ на УНСС

тестове за зрелостни изпити

връзки към средни училища в София

връзки към висши училища в България

и още много полезна информация.

Конкурсен изпит за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

За профил *математика* – 7 юли 2005 година

Време за работа 4 астрономически часа.

Задача 1. Даден е изразът $A = x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a)$.

а) Да се представи A като произведение на три множителя.

б) За кои стойности на параметъра a уравнението

$$x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a) = 0$$

има два различни корена?

в) Да се докаже, че ако $a = 3$ и $x > 6$, то $A > 0$.

г) За кои стойности на x е изпълнено неравенството $|A| > (x-2)^2$, ако $a = x$?

Задача 2. Между НПМГ и жк „Дружба“ е организирано движение с маршрутни таксита. Всяко от такситата изминава целия маршрут от НПМГ до жк „Дружба“ и обратно до НПМГ за 40 минути. В началната спирка при НПМГ никога не стои повече от едно такси.

а) Колко коли обслужват линията и колко минути е престоят в началната спирка, ако колите се движат през интервали от 7 минути?

б) Колко коли обслужват линията и колко минути е престоят в началната спирка, ако колите се движат през интервали от 7,5 минути?

Задача 3. За триъгълника ABC е известно, че $AB = BC$ и че ъглополовящата CL от върха C, височината AH от върха A и симетралата на страната AC се пресичат в точката O.

а) Да се докаже, $\triangle ABC$ е равностранен. Точките T и K са избрани съответно върху страните AB и AC така, че $BT = AK$.

б) Да се докаже, че ако N е пресечната точка на CT и BK, то $CT = BK$ и $\sphericalangle BNT = 60^\circ$.

в) Да се докаже, че ако точката M е средата на отсечката KT, то $CT = 2AM$.

Решения

Задача 1. а) Извършваме преобразуванията

$$A = x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a) = (a-2)(x^2 - 2ax - 2x + 4a) =$$
$$= (a-2)(x(x-2a) - 2(x-2a)) = (a-2)(x-2a)(x-2)$$

б) От условие а) следва, че

$$x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a) = 0 \iff (a-2)(x-2a)(x-2) = 0.$$

Оттук виждаме, че при $a = 2$ всяко x е решение на даденото уравнение. Следователно $a = 2$ не е решение на задачата.

Нека $a \neq 2$. Тогава уравнението има два корена $x_1 = 2a$ и $x_2 = 2$.

Тези корени ще са различни при $2a \neq 2$, т.е. при $a \neq 1$. Следователно уравнението има два различни корена за всяко $a \neq 1$ и $a \neq 2$.

в) При $a = 3$ имаме $A = (a-2)(x-2a)(x-2) = (x-6)(x-2)$. Очевидно при $x > 6$ имаме $x - 6 > 0$ и $x - 2 > 0$ и следователно $A > 0$, като произведение на два положителни множителя.

г) При $a = x$ разглежданото неравенство придобива вида

$$|(x-2)(-x)(x-2)| > (x-2)^2 \iff (x-2)^2|x| > (x-2)^2.$$

Ако $x = 2$ лявата и дясната страна на това неравенство са равни на нула. Следователно $x = 2$ не е решение на задачата.

За всяко $x \neq 2$ имаме $(x-2)^2 > 0$ и следователно

$$(x-2)^2|x| > (x-2)^2, x \neq 2 \iff |x| > 1, \neq 2 \iff x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty).$$

Задача 2. а) Тъй като колите се движат през 7 минути, то престоят на началната спирка трябва да бъде по-малък от 7 минути, т.е. $0 < a < 7$.

Времето, за което първата кола изминава целия маршрут заедно с почивката, е $40 + a$. За това време през 7 минути са тръгвали последователно всички коли. Тогава броят на всичките коли е $\dfrac{40+a}{7}$.

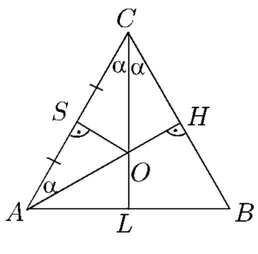
Единственото естествено число между 40 и 47, което се дели на 7 без остатък, е 42. Следователно времето за престой е $a = 2$ минути, а броят на колите е 6.

б) Аналогично на а) броят на всички коли е $\dfrac{40+a}{7,5}$, където $0 < a < 7,5$. Тогава

$$\frac{40}{7,5} = \frac{400}{75} = \frac{16}{3} < \frac{40+a}{7,5} < \frac{4,75}{7,5} = \frac{19}{3}.$$

Отново единственото естествено число между $\dfrac{16}{3} = 5\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{19}{3} = 6\dfrac{1}{3}$, което удовлетворява тези неравенства, е 6. Това означава, че броят на колите отново е 6. В този случай престоят ще бъде $6.7,5 - 40 = 5$ минути.

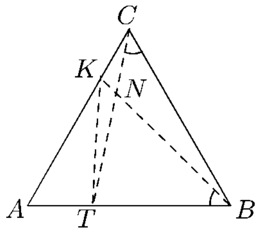
Задача 3. а) Имаме:
$\sphericalangle SCO = \sphericalangle HCO = \alpha$ (CL – ъглополовяща);
$\sphericalangle CAO = \sphericalangle ACO = \alpha$ (OS – симетрала);
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 2\alpha$ ($AB = BC$)



Оттук виждаме, че $\sphericalangle BAO = \sphericalangle BAC - \sphericalangle OAC = 2\alpha - \alpha = \alpha = \sphericalangle CAO$.

С това показахме, че AH е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$. Но AH е и височина. Следователно $AB = AC$, което означава, че $\triangle ABC$ е равностранен.

б) Да разгледаме триъгълниците BTC и ABK. Имаме:



1) $BT = AK$ (по условие);
2) $\sphericalangle KAB = \sphericalangle TCB = 60^\circ$;
3) $AB = BC$.

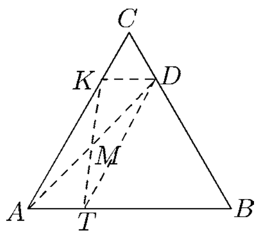
(2) и 3) следват от доказаното в а), че $\triangle ABC$ – равностранен).

Съгласно първи признак $\triangle BTC \cong \triangle ABK$. Следователно $CT = BK$ и $\sphericalangle ABK = \sphericalangle BCT$.

От друга страна, $\sphericalangle TNB = \sphericalangle NCB + \sphericalangle NBC$ като външен ъгъл за $\triangle NBC$. Оттук намираме $\sphericalangle TNB = \sphericalangle NCB + \sphericalangle NBC = \sphericalangle TBN + \sphericalangle NBC = \sphericalangle TBC = 60^\circ$.

в) Построяваме $KD \| AB, D \in BC$. Триъгълникът DKC е равностранен, тъй като ъглите му са равни на 60° ($\sphericalangle CKD = \sphericalangle CAB$ – съответни). Тогава

$$BD = BC - CD = AC - CK = AK = BT.$$



Следователно $\triangle BDT$ е равностранен (равнобедрен триъгълник с $\sphericalangle TBD = 60^\circ$). Така получихме, че $\sphericalangle BTD = 60^\circ = \sphericalangle CAB$. От това следва, че $AK \| DT$. Тогава четириъгълникът $ATDK$ е успоредник. Тъй като диагоналите на успоредника се разполовяват, то AD минава през средата M на KT и $AD = 2AM$.

Разглеждаме $\triangle ABD$ и $\triangle BCT$:
1) $AB = BC$ ($\triangle ABC$ е равностранен);
2) $BD = BT$ (доказано по-горе);
3) $\sphericalangle ABC$ – общ.

Следователно $\triangle ABD \cong \triangle BCT$. Оттук получаваме $CT = AD = 2AM$.

Указание за оценяване на писмената работа

Задача 1.	а)	2 точки	б)	2 точки	в)	2 точки	г)	2 точки
Задача 2.	а)	4 точки	б)	3 точки				
Задача 3.	а)	2 точки	б)	4 точки	в)	3 точки		4 точки

Указаните точки се получават за пълно и обосновано решение. При неточни обяснения (независимо, че са направени верни изчисления) и при технически грешки се поставят по-малко точки. При по-малко от 3 точки оценката е слаб. В случай, че получените точки са най-малко 3, окончателната оценка се получава по формулата

$$\text{Оценката} = \frac{\text{Общ брой на получените точки} + 24}{9}.$$