ТЕМА
за вътрешен профилиращ изпит по математика за прием на ученици след 7. клас в НПМГ „Акад. Л. Чакалов”
28.05.2016 г.
Вариант 2

За задачи от 1. до 6. запишете само верния според Вас отговор.
Верният отговор на всяка задача от 1. до 6 включително се оценява с 2 точки.

Задача	**Отговор**
1	8
2	$-\frac{1}{2}$
3	6 cm
4	20 kg
5	1,25 cm
6	$AB = 672\,\text{cm}$, $AC = 640\,\text{cm}$ и $BC = 704\,\text{cm}$.

За задачи от 7. до 10. запишете пълно и обосновано решение. Пълното решение на задачи от 7. до 10. се оценява със 7 точки.

Задача 7. Разстоянието между речните пристанища A и B е 60 km. В 9 часа от A към B тръгнал сал и едновременно с него от B към A тръгнал катер. В 12 часа катерът срещнал сала и продължил към A. След престой от 45 минути в A, катерът тръгнал обратно към B. В колко часа катерът е настигнал сала, ако скоростта на течението е 4 km/h?

***РЕШЕНИЕ*:** Означаваме скоростта на катера в спокойни води с x km/h Тъй като салът се движи по течението на реката, то течението е от A към B. До срещата двата плавателни съда са се движили 3 часа и са изминали общо 60 km. Съставяме уравнението откъдето получаваме $x = 20\,\text{km/h}$. До срещата салът е изминал 3.4=12 km, а скоростта на катера срещу течението е 16 km/h Следователно катерът пристига в пристанище A след $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}\,\text{h}$. Означаваме с y h времето, през което катерът се движи по течението след престоя си в A до настигането на сала. Тогава времето за движение на сала от срещата до настигането е $y + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\,\text{h}$. Скоростта на катера по течението е 24 km/h Съставяме уравнението $24y = 12 + 4\left(y + \frac{3}{2}\right)$, което има решение $y = \frac{9}{10}\,\text{h}$. Получаваме, че общото време за движение на сала е $5\frac{2}{5}\,\text{h}$ и катерът е настигнал сала в 14 часа и 24 минути.

Задача 8. Да се намери най-малкото цяло число, което е решение на неравенството $\left(2-x\right)^3+\left(x^2-3x+9\right)\left(x+3\right)<6\left(x+2\right)^2-1$.

РЕШЕНИЕ:

$8-12x+6x^2-x^3+x^3+27<6\left(x^2+4x+4\right)-1$

$35-12x+6x^2<6x^2+24x+24-1$.

$35-12x<24x+23$.

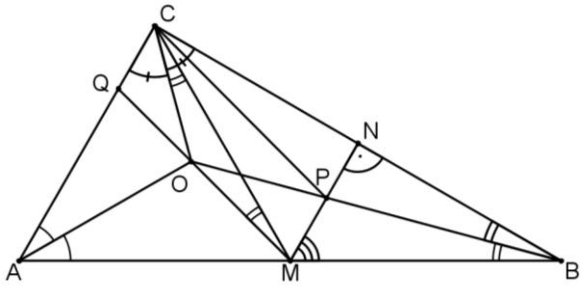
$-36x<-12$.

$x>\frac{1}{3}$.

Следователно най-малкото цяло число, което е решение на неравенството е 1.

Задача 9. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB и $\sphericalangle ABC=30^\circ$. Точка M е средата на AB, а точка N – на BC. Ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ се пресичат в точка O, а ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича MN в точка P. Правата MO пресича страната AC в точка Q. Да се докаже, че $QM=BP$.

РЕШЕНИЕ:



В $\triangle ABC$ получаваме $\sphericalangle BAC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$ и CM е медиана към хипотенузата. Следователно $CM=\frac{1}{2}AB=AM=BM$. Така получаваме, че $\triangle AMC$ е равностранен и $\triangle MBC$ е равнобедрен (*CM=BM). MN* е медиана към основата в равнобедрения $\triangle MBC$ следователно $MN\perp BC$. Но $AC\perp BC$ следователно $AC\parallel MN$, откъдето $\sphericalangle BMN=\sphericalangle BAC=60^\circ$. Ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ в $\triangle ABC$ се пресичат в точка O, следователно точка O е на равни разстояния от страните на триъгълника, откъдето получаваме, че AO е ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$. Тогава $\triangle AOM\cong\triangle AOC$ (I пр.). Следователно $CO=MO$ и $\triangle CMO$ е равнобедрен. За $\sphericalangle OCM$ получаваме $\sphericalangle OCM=\sphericalangle ACM-\sphericalangle ACL=60^\circ-45^\circ=15^\circ$, следователно и $\sphericalangle OMC=15^\circ$. Но MN е симетрала на BC, следователно $CP=BP$ и $\sphericalangle PCB=15^\circ$, откъдето $\sphericalangle PCM=15^\circ$ и $CP\parallel QM$. Така получаваме, че $CPMQ$ е успоредник и $MQ=CP=BP$

Задача 10. Намерете най-малката стойност на израза $A=x^2+6y^2-2xy-8x-22y+70$. За кои стойности на x и y се постига тя?

РЕШЕНИЕ:

$A=x^2-8x+16-2xy+8y+y^2+5y^2-30y+54$

$A=\left[\left(x-4\right)^2-2y\left(x-4\right)+y^2\right]+5\left(y^2-6y+9\right)+9$

$A=\left(x-4-y\right)^2+5\left(y-3\right)^2+9$

Тъй като $\left(x-4-y\right)^2\geq 0$ и $5\left(y-3\right)^2\geq 0$, то най-малката стойност на A е 9. Тя се достига при $5\left(y-3\right)^2=0$, и $\left(x-4-y\right)^2=0$ т.е. при $y=3$ и $x=7$.